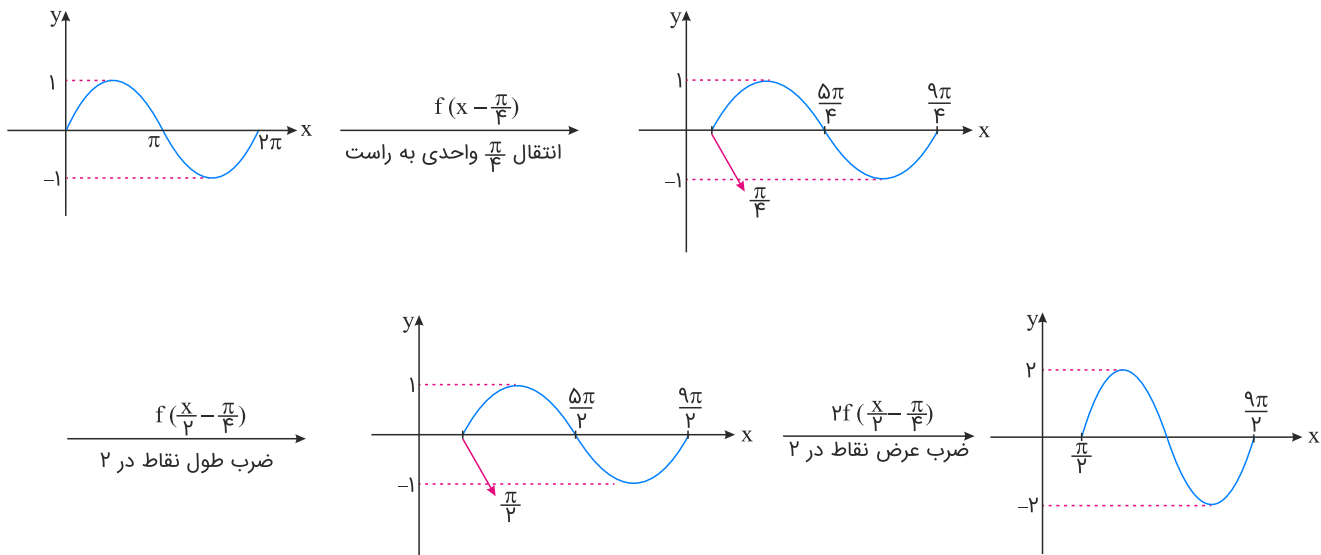




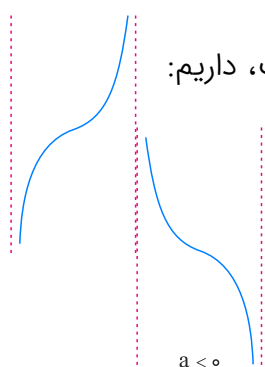
گزینه ۲

۱

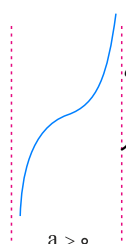
برای رسم نمودار $g(x)$ ، باید نمودار $f\left(\frac{2x-\pi}{4}\right) = f\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}\right)$ را رسم کنیم. به همین جهت ابتدا نمودار تابع f را در جهت افقی و به اندازه $\frac{\pi}{4}$ به سمت راست انتقال می‌دهیم $\left(f\left(x - \frac{\pi}{4}\right)\right)$. سپس طول همه نقاط نمودار حاصل را در ۲ ضرب می‌کنیم (نمودار دچار انبساط افقی می‌شود). شکل حاصل نمودار $f\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}\right)$ را نشان می‌دهد. در ادامه عرض همه نقاط نمودار $f\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}\right)$ را در ۲ ضرب می‌کنیم. نمودار حاصل همان $g(x)$ است.



نمودار تابع $y = \tan x$ در بازه‌های پیوستگی‌اش به صورت زیر است:



نمودار تابع $y = \tan(ax)$ باتوجه به علامت a ، در بازه‌های پیوستگی‌اش به صورت زیر است، داریم:



باتوجه به نمودار رسم شده، a باید منفی باشد. از طرفی دیگر $\frac{-\pi}{3}$ تا π ، تابع دارای ۲ دوره تناوب است، پس هر دوره تناوب اصلی این تابع، برابر است با:

$$2T = \pi - \left(\frac{-\pi}{3}\right) \Rightarrow 2T = \frac{4\pi}{3} \Rightarrow T = \frac{2\pi}{3}$$

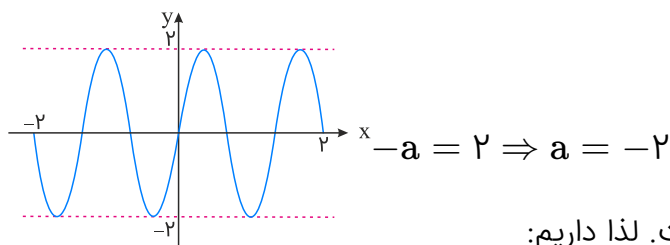
چون $a < 0$ است، پس مقدار منفی آن را می‌پذیریم. داریم:

$$T = \underbrace{\frac{\pi}{|a|}}_{\text{ضریب کمان } x} \Rightarrow \frac{2\pi}{3} = \frac{\pi}{|a|} \Rightarrow |a| = \frac{3}{2} \xrightarrow{a < 0} a = -\frac{3}{2}$$

باتوجه به اینکه $\cos(\frac{3\pi}{2} - \pi bx) = -\sin \pi bx$ ، ضابطه نمودار را ساده می‌کنیم:

$$y = a \cos(\underbrace{\frac{3\pi}{2} - \pi bx}_{-\sin \pi bx}) = -a \sin \pi bx$$

با دقت در شکل می‌بینیم که $y_{\max} = 2$ ، یعنی:



و همچنین در بازه $[-2, 2]$ نمودار سه بار تکرار داشته است. لذا داریم:

$$3T = 2 - (-2) = 4 \Rightarrow T = \frac{4}{3}$$

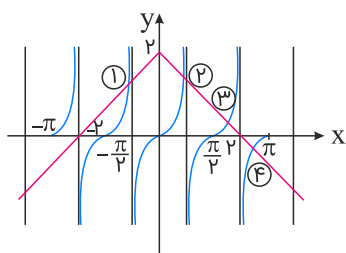
$$\xrightarrow{T = \frac{4}{3}} \frac{2\pi}{|\pi b|} = \frac{4}{3} \Rightarrow \frac{2}{|b|} = \frac{4}{3} \Rightarrow |b| = \frac{3}{2} \Rightarrow \begin{cases} b = \frac{3}{2} & \text{ق.ق} \\ b = -\frac{3}{2} & \text{غ.ق.ق} \end{cases}$$

چون $a = -2$ و نمودار نسبت به محور y ها قرینه نشده است، $b = -\frac{3}{2}$ قابل قبول نیست، بنابراین داریم:

$$a = -2, \quad b = \frac{3}{2} \Rightarrow a.b = -3$$

* می‌توانستیم $a = 2$ و $b = -\frac{3}{2}$ را هم در نظر بگیریم اما چون ضرب مدنظر است فرقی ندارد.

نمودار توابع $y_1 = \tan 2x$ و $y_2 = -|x| + 2$ را در یک دستگاه رسم می‌کنیم:



دو نمودار در ۴ نقطه یکدیگر را قطع می‌کنند، پس معادله ۴ جواب دارد.

مقدار ماکزیمم و مینیمم تابع به ترتیب ۱ و -3 است، پس داریم:

$$\left. \begin{aligned} y_{\max} &= |b| + c = 1 \\ y_{\min} &= -|b| + c = -3 \end{aligned} \right\} \Rightarrow |b| = 2, \quad c = -1$$

باتوجه به اینکه نمودار تابع سینوسی $y = b \sin(ax) + c$ در سمت راست محور y ها، به صورت صعودی شروع شده، پس $a > 0$ است.

از طرفی دوره تناوب تابع $T = 4\pi - \left(\frac{-4\pi}{3}\right) = \frac{16\pi}{3}$ است، پس داریم:

$$\frac{2\pi}{|a|} = \frac{16\pi}{3} \Rightarrow |a| = \frac{3}{8}$$

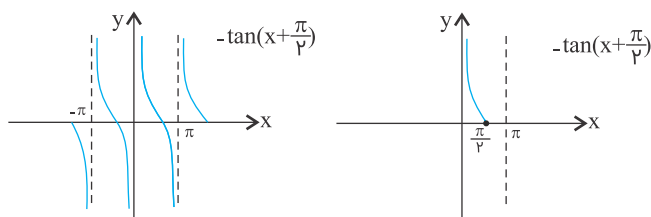
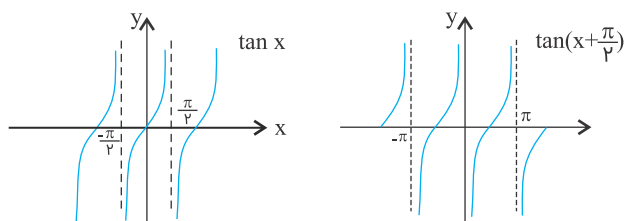
پس باتوجه به اینکه $ab > 0$ است، داریم:

$$f_{abc} = 4\left(\frac{3}{8} \times 2 \times (-1)\right) = -3$$

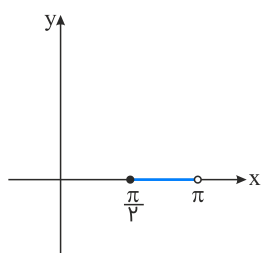
برای رسم تابع f باید قدر مطلق را برداریم. برای این منظور باید علامت $\cot x$ را در بازه $(-\pi, \pi)$ مشخص کنیم. داریم:

$$0 < x \leq \frac{\pi}{2} \xrightarrow[\cot x > 0]{x \in \text{ربع اول}} f(x) = \frac{\cot x + \cot x}{2} = \frac{\cancel{2} \cot x}{\cancel{2}} = \cot x$$

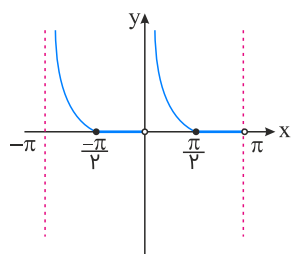
باتوجه به اینکه $-\tan(\frac{\pi}{2} + x) = \cot x$ است، برای رسم $\cot x$ باید نمودار تانژانت را $\frac{\pi}{2}$ سمت چپ ببریم و سپس آن را نسبت به محور x ها قرینه کنیم، در آخر در بازه $0 < x \leq \frac{\pi}{2}$ تابع را رسم می‌کنیم:



$$\frac{\pi}{2} < x < \pi \xrightarrow[\cot x < 0]{x \in \text{ربع دوم}} f(x) = \frac{\cot x - \cot x}{2} = 0$$



پس نمودار تابع f به صورت زیر خواهد بود. داریم:



گزینه ۳

۷

$$-1 \leq \cos 2x \leq 1 \Rightarrow -3 \leq 3 \cos 2x \leq 3 \\ \Rightarrow -2 \leq 1 + 3 \cos 2x \leq 4 \Rightarrow \text{Max} = 4$$

$$0 \leq \sin^2 \omega x \leq 1 \Rightarrow -4 \leq -4 \sin^2 \omega x \leq 0 \\ \Rightarrow -3 \leq 1 - 4 \sin^2 \omega x \leq 1 \Rightarrow \text{Min} = -3$$

$$4 - (-3) = 7$$

$$f(0) = -\sqrt{2} - \frac{1}{2} \Rightarrow 2 \sin\left(-\frac{3\pi}{4}\right) + a = -\sqrt{2} - \frac{1}{2} \Rightarrow 2\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + a = -\sqrt{2} - \frac{1}{2} \Rightarrow a = \frac{-1}{2}$$

$$T = \frac{2\pi}{|b|} = \frac{2\pi}{3} \Rightarrow b = \pm 3$$

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) > 0 \Rightarrow 2 \sin\left(\frac{b\pi}{2} - \frac{3\pi}{4}\right) - \frac{1}{2} > 0 \xrightarrow{b=\pm 3} b > 0 \Rightarrow b = 3$$

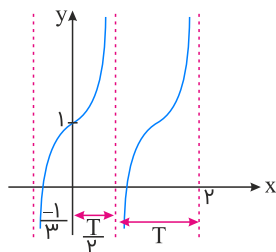
$$\Rightarrow a + b = -\frac{1}{2} + 3 = \frac{5}{2}$$

توجه کنید که وقتی نمودار توابع مثلثاتی دارای انتقال افقی هستند، مشخص کردن علامت b (ضریب x) کار ساده‌ای نیست.

اول از همه مقدار تابع در صفر برابر ۱ است، پس داریم:

$$y(0) = 1 \Rightarrow a \tan(0) + c = 1 \Rightarrow c = 1 \Rightarrow y = a \tan(b\pi x) + 1$$

باتوجه به شکل تابع، داریم:



$$\frac{T}{2} + T = 2 \Rightarrow \frac{3T}{2} = 2 \Rightarrow T = \frac{4}{3}$$

دوره تناوب تابع برابر $\frac{4}{3}$ است، پس داریم:

$$\frac{4}{3} = \frac{\pi}{|b\pi|} \Rightarrow |b| = \frac{3}{4} \Rightarrow b = \frac{3}{4} \text{ یا } b = -\frac{3}{4}$$

مقدار تابع در $\frac{-1}{3}$ برابر صفر است، پس داریم:

$$y = a \tan\left(\frac{3\pi}{4}x\right) + 1 \xrightarrow{\left(\frac{-1}{3}, 0\right)} 0 = a \tan\left(\frac{-\pi}{4}\right) + 1 \Rightarrow -a + 1 \Rightarrow a = 1$$

حال با معلوم بودن مقادیر a ، b و c ، حاصل $a + b + c$ برابر است با:

$$a + b + c = 1 + \frac{3}{4} + a = 2/75$$

تذکر: به ازای $b = -\frac{3}{4}$ ، حاصل $a + b + c$ برابر $-5/75$ است که در گزینه ها وجود ندارد.

$$\frac{2\pi}{|a+1|\pi} = \frac{2}{7} \Rightarrow |a+1| = 7 \Rightarrow \begin{cases} a+1 = 7 \Rightarrow a = 6 \\ a+1 = -7 \Rightarrow a = -8 \end{cases}$$

چون $a < 0$ است، پس:

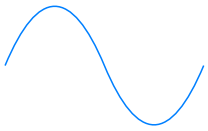
$$f(x) = -8 + \sin(-7\pi x) \Rightarrow \min(f(x)) = -8 - 1 = -9$$

تذکر: کمترین مقدار تابع $y = a \sin bx + c$ برابر $-|a| + c$ است.

ضابطه f را ساده‌تر می‌نویسیم:

$$\begin{aligned} f(x) &= a \cos \pi \left(bx + \frac{\gamma}{\gamma} \right) = a \cos \left(\frac{\gamma \pi}{\gamma} + b \pi x \right) = a \cos \left(\gamma \pi + \frac{\gamma \pi}{\gamma} + b \pi x \right) \\ &= a \cos \left(\frac{\gamma \pi}{\gamma} + b \pi x \right) = a \sin (b \pi x) \end{aligned}$$

چون تابع سینوسی است و شروع آن به صورت زیر است، پس $a \times (b \pi) > 0$ ، در نتیجه: $ab > 0$



ماکزیمم تابع ۴ است، پس: $|a| = 4$ ، $\frac{\gamma}{4}$ دوره تناوب تابع ۱۲ است، پس:

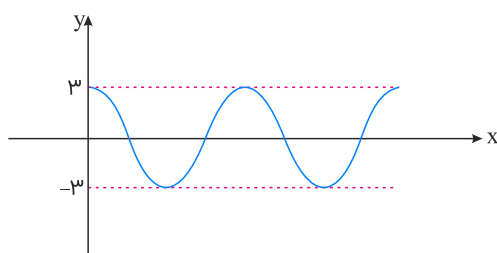
$$\frac{\gamma}{4} T = 12 \Rightarrow T = 16 \Rightarrow \frac{\gamma \pi}{|b \pi|} = 16 \Rightarrow |b| = \frac{1}{\lambda}$$

$$\begin{cases} a = -4 \\ b = \frac{-1}{\lambda} \end{cases} \text{ یا } \begin{cases} a = 4 \\ b = \frac{1}{\lambda} \end{cases} \text{ با توجه به } ab > 0 \text{ دو حالت داریم:}$$

در نتیجه:

$$a + 16b = \pm \left(4 + 16 \left(\frac{1}{\lambda} \right) \right) = \pm 6$$

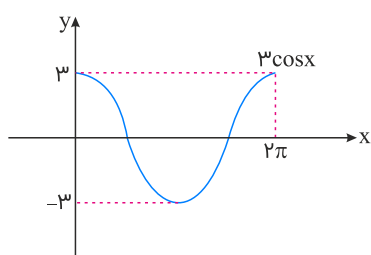
می‌دانیم $-1 \leq \cos(ax) \leq 1$ ، پس $-3 \leq 3 \cos(ax) \leq 3$ و باتوجه به شکل، واضح است که:



$$\begin{cases} \text{صفر تلاقی} \Rightarrow 3 < a \text{ یا } a < -3 \\ \text{کمترین تلاقی} \Rightarrow a = \pm 3 \\ \text{بیشترین تلاقی} \Rightarrow a = \pm 1 \text{ یا } a = \pm 2 \end{cases}$$

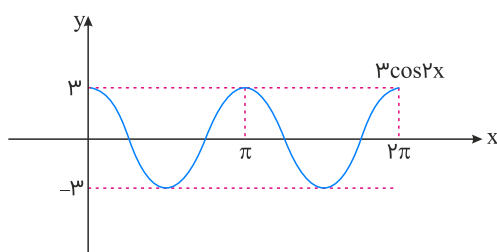
نمودار دقیق تابع را در این دو حالت در فاصله $(0, 2\pi)$ رسم می‌کنیم و تعداد نقاط تلاقی را می‌شماریم:

$$۱) a = \pm 1 \Rightarrow f(x) = 3 \cos x$$



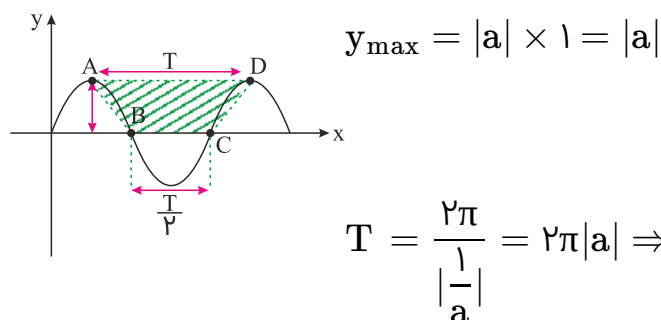
واضح است که خط $y = 1$ یا $y = -1$ هرکدام نمودار تابع را در دو نقطه قطع می‌کند.

$$۲) a = \pm 2 \Rightarrow f(x) = 3 \cos 2x$$



همانطور که می‌بینیم، خط $y = 2$ یا $y = -2$ هرکدام نمودار تابع را در چهار نقطه قطع می‌کند.

باتوجه به شکل زیر، واضح است که چهار ضلعی ABCD دوزنقه‌ای است که قاعده بزرگ آن $AD = T$ ، قاعده کوچک آن $BC = \frac{T}{2}$ و طول ارتفاع آن برابر با y_A یعنی به اندازه مقدار ماکزیم تابع است:



ازطرفی دقت کنید که دوره تناوب این تابع برابر است با:

پس مساحت دوزنقه فوق برابر است با:

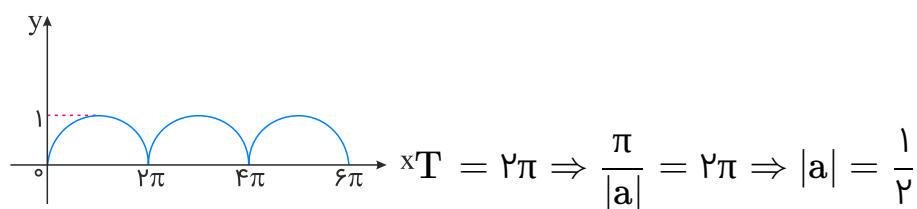
$$S = \frac{\text{ارتفاع} \times \text{مجموع قاعده‌ها}}{2} = \frac{(2\pi|a| + \pi|a|) \times |a|}{2} = \frac{3\pi|a|^2}{2} = \frac{3\pi}{2}a^2$$

$$\xrightarrow{S=13/5\pi} \frac{3\pi}{2}a^2 = 13/5\pi \Rightarrow a^2 = 9 \Rightarrow a = \pm 3$$

دقت کنید که باتوجه به نمودار سینوسی کشیده شده و ضابطه $f(x) = a \sin(\frac{x}{a})$ می‌تواند هم مثبت و هم منفی باشد:

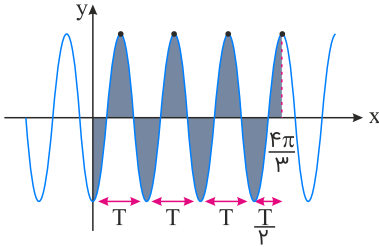
$$f(x) = a \sin\left(\frac{x}{a}\right) = \begin{cases} \xrightarrow{a=3} 3 \sin\left(\frac{x}{3}\right) \\ \xrightarrow{a=-3} -3 \sin\left(\frac{x}{-3}\right) = 3 \sin\left(\frac{x}{3}\right) \end{cases}$$

پس $a = \pm 3$ هر دو قابل قبول هستند و کمترین مقدار ممکن برای a ، -3 است.



$$y(0) = 0 \Rightarrow y = \left|\sin \frac{x}{2}\right| \text{ یا } y = \left|\sin\left(\frac{-x}{2}\right)\right|$$

چون سؤال از ما حداکثر مقدار a را خواسته است، پس نتیجه می‌گیریم در $x = \frac{4\pi}{3}$ تابع دارای چهارمین ماکزیمم خود خواهد بود. نمودار کلی $y = -3 \cos ax$ به صورت زیر است. باتوجه به نمودار تابع $y = -3 \cos ax$ داریم:



$$۷ \times \text{طاق} = \frac{4\pi}{3} \Rightarrow \text{طاق} = \frac{4\pi}{۲۱} \Rightarrow T = ۲ \times \text{طاق} = \frac{8\pi}{۲۱}$$

از طرف دیگر می‌دانیم دوره تناوب تابع $y = -3 \cos ax$ برابر است با $T = \frac{2\pi}{|a|}$ است، پس داریم:

$$\frac{2\pi}{|a|} = \frac{8\pi}{۲۱} \Rightarrow |a| = \frac{۲۱}{۴} \Rightarrow a = \frac{۲۱}{۴}$$